

EMF-Formelsammlung

J.Allmers

21. August 2003

- Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

in Grenzflächen:

$$\begin{aligned} \rho_F &= \vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) & 0 &= \vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) & \vec{n} &\text{ in Feldrichtung} \\ 0 &= \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) & \vec{J}_F &= \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) & \vec{n} &\text{ in Feldrichtung} \end{aligned}$$

- Kontinuitätsgleichung / Ladungserhaltung

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Ladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \text{ (Punktladung)}$$

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} d^3r$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon(\vec{r} - \vec{r}')} dV \text{ (Potential einer Punktladung)}$$

$$\varphi(r) = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon} \ln(r/r_0) \text{ mit } \varphi(r_0) = 0 \text{ (Potential einer Linienladung)}$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \sqrt{\frac{R^{-2}}{R+2}} \text{ (Potential an Spiegelladungen)}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r} \vec{P}_d}{r^3}$$

mit \vec{l} = Abstand der Ladungen $\vec{P}_d = \Delta q \vec{l}$ (Potential Dipols \rightarrow Spiegelladungen)

- Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

- Poisson Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

- inhomogene Potentiale / Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad \nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ bei Erzeugung, sonst } = 0$$

- Lösung der Wellengleichung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{mit } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda_{vac}} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \vec{e} \quad \vec{e}: \text{Wellenvektor}$$

- Dipolstrahlung

$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega\mu}{r} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi} \cdot \frac{jk}{r} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

- Rechteckhohlleiter

$$\omega_c = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \gamma_x = \frac{m\pi}{a} \quad \gamma_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$\text{TM-Mode: } H_z = 0 \quad E_z|_s = 0$$

$$\text{TE-Mode: } E_z = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \vec{e}_s} B_z|_s = 0$$

- Biot-Savat-Ampere

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \cdot \vec{r}_{12}$$

- Kraft auf Leiter / Ladungen

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad \text{für parallele Leiter: } \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}$$

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad F = \int_V J'(r) \times \vec{B}(r) dV \quad \vec{F}(\vec{r}) = Q \cdot E(\vec{r})$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

- magnetische Energie

$$W_m = 1/2 \underbrace{\oint \vec{H} d\vec{s}}_I \underbrace{\int \vec{B} d\vec{A}}_\Phi = 1/2 LI^2$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = NI \quad L = \frac{\Phi}{I}$$

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A} \quad M = \frac{N\Phi}{I}$$

- Coulomb

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$Q = \iiint \vec{D} d\vec{A} \quad \vec{F}(\vec{r}) = Q \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$U = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{s} = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \vec{E} = - \text{grad } \varphi$$

- Gaußscher Integralsatz der Elektrostatik

$$\oint_A \vec{E} \vec{n} dA = q/\epsilon_0 \text{ bei } q \in V \text{ sonst } 0$$

- Skin-Effekt

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0}} \text{ mit } \kappa = \text{Leitfähigkeit}$$

- Pointing Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad S = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 = \frac{1}{Z_W} E^2$$

- Induktion und Wellenzahl

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Wellen- und Leiterwiderstand, Reflexion und Transmission

$$\frac{|E|}{|H|} = Z_W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 120\pi\Omega \text{ in Luft} \quad Z_L = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{Z' - Z}{Z' + Z} \quad T = \frac{2Z'}{Z' + Z} \quad T = 1 + R$$

- Dämpfung

$$D = e^{-\alpha d} \text{ mit } \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \text{Im}\{h\}$$

- Brechungsindex

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

- Retardierung

$$t \mapsto t - \frac{|r - r'|}{v}$$

- Sonstiges

$$E = \frac{U}{d} \quad C = \frac{Q}{U} \quad W_C = 1/2CU^2$$

- Einheiten und Konstanten

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{As}{Vm}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_{vac} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} \quad e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[B] = \frac{V \cdot s}{m^2} = T \quad [H] = \frac{A}{m} \quad [E] = \frac{V}{m} \quad [D] = \frac{C}{m^2} \quad [V] = \frac{J}{C} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3 A}$$

- Mathematik:

- Gauß

$$\int_V \text{div } \vec{G} dV = \oiint \vec{G} d\vec{A}$$

- Stokes

$$\int_A \text{rot } \vec{G} d\vec{A} = \oint \vec{G} d\vec{s}$$

- Das Kreuzprodukt ist die Lösung der Determinante

$$\vec{v}^1 \times \vec{v}^2 = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{pmatrix}$$

- Gradient ist der Zeilenvektor der partiellen Ableitungen:

$$\text{grad } f(\vec{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- Nabla Operator ist der Gradient transponiert:

$$\nabla f(\vec{x}) := (\text{grad } f(\vec{x}))^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Laplace Operator ist die Summe der 2. Ableitungen:

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

- Divergenz (Quelle und Senke):

$$\text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} := \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

- Rotation:

$$\text{rot } \vec{f} = \nabla \times \vec{f} := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

- Euler:

$$a e^{jb} = a(\cos b + j \sin b)$$