Mathematik für Ingenieure I & II & III

J.Allmers and M. Schaefer

4. Juni 2003

How To's für die Mathe Vordiploms - Klausur für Elektrotechniker an der TU Braunschweig. Dieses Dokument stellt eine private Sammlung von Formeln und Algorithmen da. Es ist keine Veröffentlichung der Technischen Universität Braunschweig.

Unser Dank gilt Prof. Dr. Thomas Sonar, Dipl. Math. Stefanie Schmitd - vielen Dank für die Geduld, wenn wir mal wieder nur "eine einzige Frage" hatten.

Dieses Dokument wurde mit LaTeXgesetzt!

joern@allmers.de m.schaefer@tu-bs.de

Inhaltsverzeichnis

1 Anstelle eines Vorworts

Dieses Dokument entstand weil es doch ein wenig zu viele Formeln waren um sie alle auswendig zu lernen, und weil man, gerade wenn man "neu" in der Uni ist, sich im Bronstein verliert.

Dieses Dokument ist *nicht* von Mathematikern geschrieben worden, es enthlt keine Beweise oder änliches, wahrscheinlich ist noch nicht einmal alles ganz mathematisch korrekt. Die angegebenen Verfahren sind "Kochrezepte", an denen man sich zur Lösung einer Aufgabe langhangeln kann, was natürlich bedeutet, dass man die mathematischen Verfahren zumindest schonmal gehört haben muss.

Fehler, Verbesserungsvorschläge usw. bitte an joern@allmers.de senden!

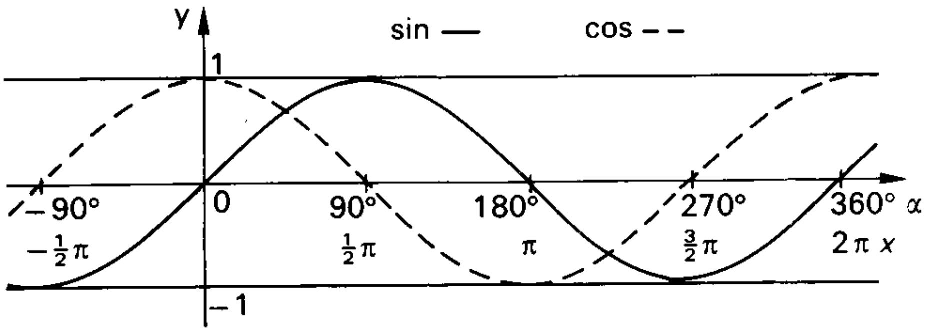

Abbildung 1: Verläufe von Sinus und Cosinus

2 Allgemeines

- Die `''p-q'' Formel` (das ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- Rechenregeln, die man immer wieder braucht

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

- `Sinus und Cosinus`

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Einige Werte von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens (siehe auch die Verläufe in den Bildern 1 und 2)

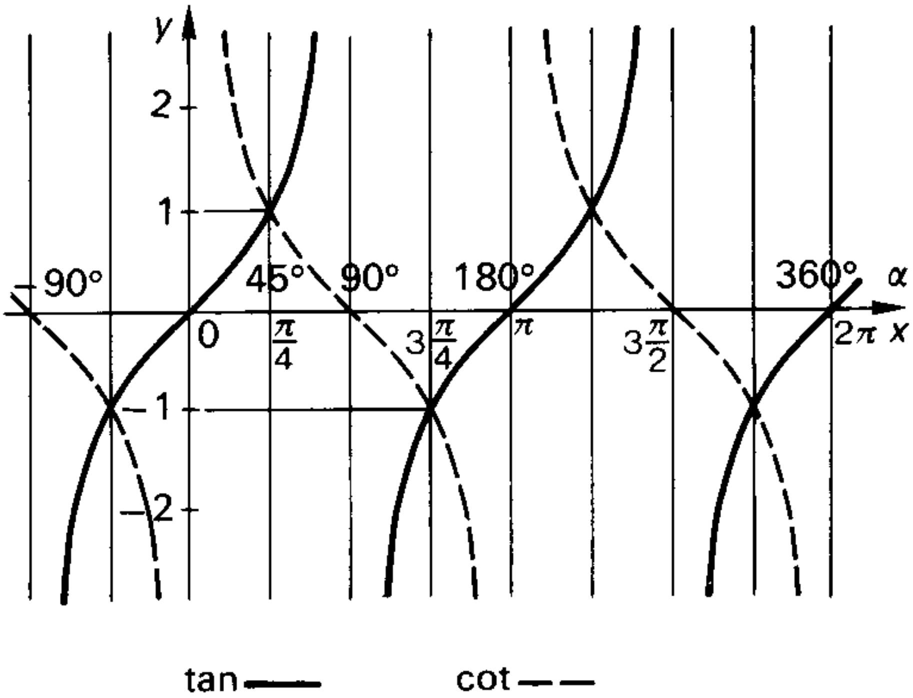

Abbildung 2: Verläufe von Tangens und Cotangens

α	x	sin	cos	tan	cot
0°	0	0	1	0	nicht def.
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht def.	0

- `Trigonometrische Funktionen` mit `komplexen Werten`

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos(x+iy)) \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin iz = i \sinh z \qquad \sinh iz = i \sin z$$

$$\cos iz = \cosh z \qquad \cosh iz = \cos z$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2i}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

- Wichtige `Integrale` und ihre Lösungen

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \qquad \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a} \qquad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x \qquad \int \tan x dx = -\ln|\cos x|$$

- `Differentiationsregeln`
  - Produktregel

$$f(x) = u \cdot v \quad \rightarrow \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

  - Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2}$$

  - Kettenregel

$$f(x) = h(g(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

    Maerksatz: "innere mal äußere"
    Beispiel:

$$(x^2+2)^3 \rightarrow 3 \cdot 2x(x^2+2)^2$$

- Beim `Integrieren` $+C$ nicht vergessen, wenn keine Grenzen vorhanden sind!
- Das `Kreuzprodukt` ist die Lösung der Determinante

$$\vec{v}^1 \times \vec{v}^2 = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{pmatrix}$$

  Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \cdot 4 \cdot 5 + \vec{e}_2 \cdot 3 \cdot 0 + \vec{e}_3 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \cdot \vec{e}_3 - 6 \cdot 3 \cdot \vec{e}_1 - 5 \cdot 2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- `Vektorprodukt`

$$< \vec{a}, \vec{b} >= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$$

  ist wenn $\vec{a} \perp \vec{b} = 0$

- Bildung von `Determinanten`

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 - a_2 b_2$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \searrow (+) & b_1 \searrow (+) & c_1 \searrow (+) \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \nearrow (-) & b_3 \nearrow (-) & c_3 \nearrow (-) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

- `Eigenwerte` (Bronstein S. 278) genügen der Gleichung

$$\det(A - \lambda I)$$

  wobei I die der Größe der Matrix entsprechende Einheitsmatrix (alles 0 außer die Hauptdiagonale, dort 1) ist.

- `Eigenvektoren` der Matrix A sind Vektoren und die der Gleichung ($\vec{v}$ ist der EV):

$$(A - \lambda_i I)\vec{v} \stackrel{!}{=} 0$$

  genügen. Zu jedem λ muss es einen EV geben, alle EV müssen linear unabhängig sein! Wenn ich nicht genug EV finde, brauche ich Hauptvektoren!

- `Hauptvektoren`
  - 1. Stufe:

$$(A - \lambda_{\text{des EV}} I)\vec{v}_H = \vec{v}_{\text{Der EV}}$$

    muß nicht unbedingt der EV des Lambdas sein, wozu ich den EV nicht finde!
  - 2. Stufe: im Grunde genauso, nur:

$$(A - \lambda_{\text{des EV}} I)\vec{v}_{H_2} = \vec{v}_{\text{Der HV}}$$

- `geometrische und algebraische Vielfachheit`
  - geometrische Vielfachheit
    Wie viele linear unabhängige Eigenvektoren kann ich aus einem Eigenwert machen?
  - algebraische Vielfachheit
    Wie oft tritt ein Eigenwert auf?

- `Polynomdivision`
  Die Polynomdivision funktioniert im Grunde wie das schriftliche Dividieren. Um die Nullstellensuche zu vereinfachen, rät man eine Nullstelle und dividiert durch $(x - \mathrm{NST})$.

- `Matrizen invertieren`
  Ist praktisch ein Gauß, wo neben der Matrix eine gleichgroße Einheitsmatrix steht. Gauß wird so lange durchgeführt, bis die Ausgangsmatrix zur Einheitsmatrix geworden ist. Ergebnis ist die ehemalige Einheitsmatrix.

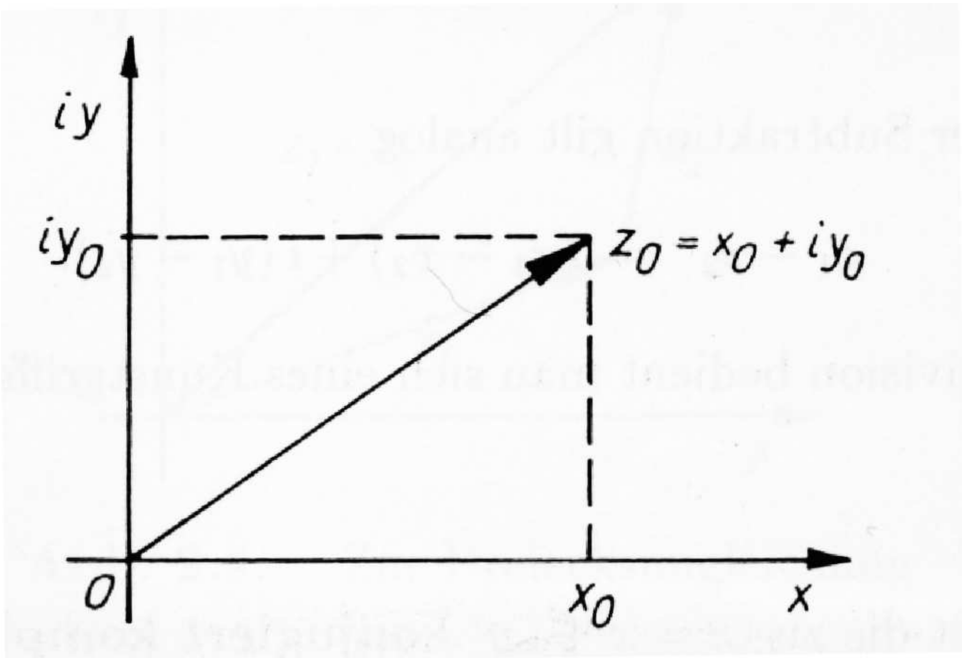

Abbildung 3: Die Gaußsche Zahlenebene

3 Komplexe Zahlen: Allgemeines

Allgemein ist i die Lösung der Gleichung:

$$\sqrt{-1} = i$$

Bild 3 zeigt die sogenannte Gaußsche Zahlenebene. Die x-Achse stellt den realwertigen Zahlenwert von z dar, die y-Achse den komplexen.

3.1 Grundlegende Rechenregeln und Definitionen

($z = x + iy$ sei jeweils eine komplexe Zahl)

- Gleichheit

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \wedge \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

- Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

- Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

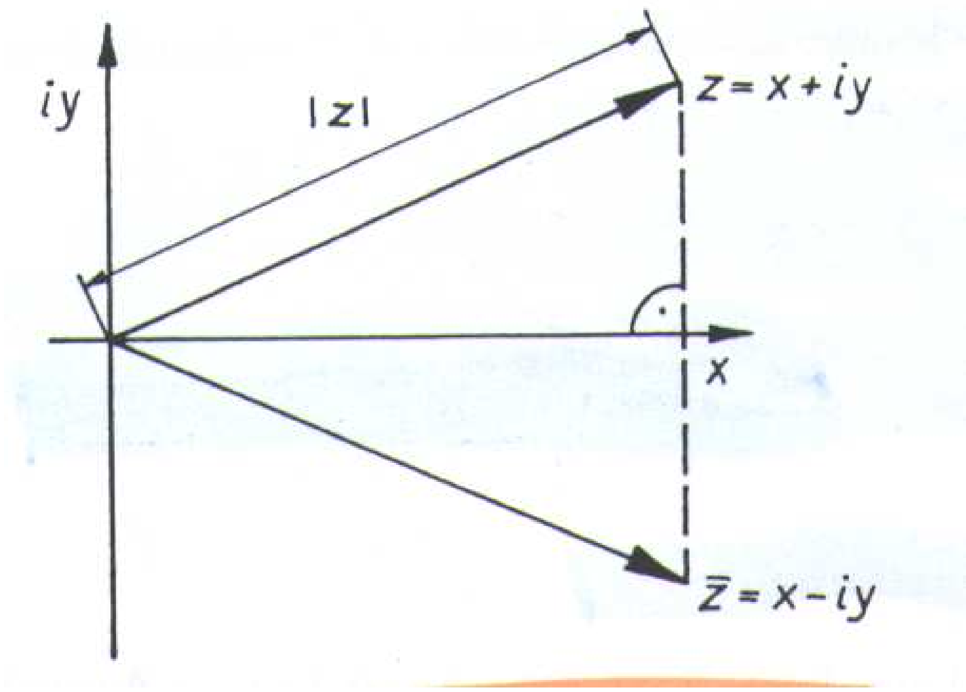

Abbildung 4: Konjugiert komplexe Zahl

- Division

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

- konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{z} := x - iy$$

ist die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl (Siehe Bild 4)

- Norm (Betrag, Länge, Modul (siehe auch Bild 4))

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Eigenschaften

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$z \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \quad , \text{ d.h. } z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

$$|z| \geq 0 \quad , \quad |z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

- Rechenregeln

$$(1 - i) \cdot (1 + i) = 1 + i - i + 1 = 2$$
$$(-1 - i) \cdot (-1 + i) = +1 + i - i + 1 = 2$$
$$\frac{1}{-ai} = ai$$

3.2 Polarkoordinaten

Häufig (z.B. zum Potenzieren) ist es sinnvoll, komplexe Zahlen in der Polarkoordinatendarstellung zu betrachen. (Bild 5)

3.2.1 Bezeichnungen und Beziehungen

$$\varphi = \arg z$$
$$|z| = r$$

Ist φ der zwischen positiver x-Achse und komplexer Zahl $z \neq 0$ gemessene Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$, so gilt:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Hierbei ist r die `Länge (der Betrag, das Modul)` von z und φ das Argument der komplexen Zahl z.

Umrechnungen:

- $$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

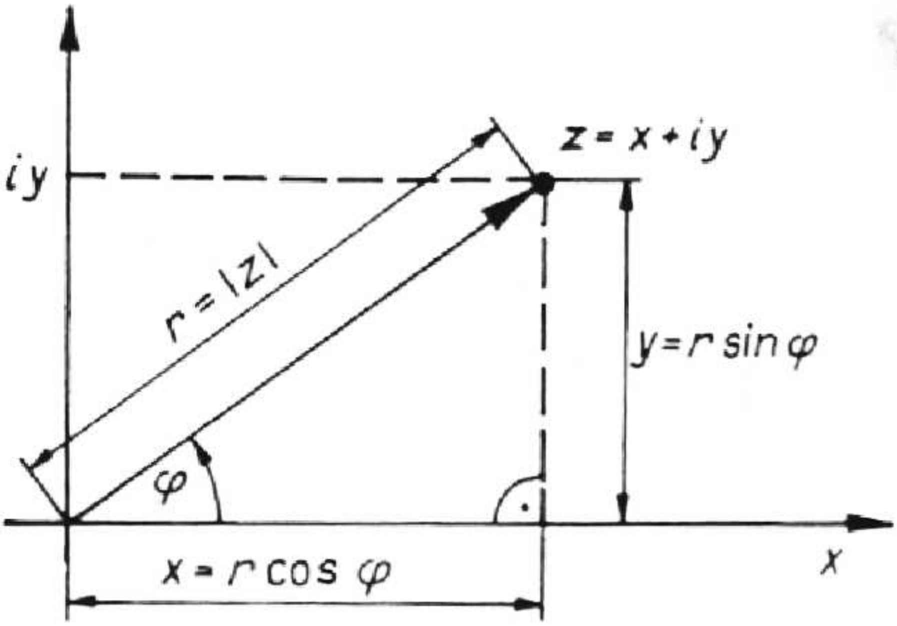

Abbildung 5: Polaarkoordinaten einer komplexen Zahl

- $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
- $$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ mit } (z \neq 0)$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$$

Bei der Berechnung von φ muss man die Mehrdeutigkeit des arctan beachten:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & , \quad x > 0, y \geq 0 \\ \pi/2 & , \quad x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & , \quad x < 0 \\ 3\pi/2 & , \quad x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan(y/x) & , \quad x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Hierbei ist der arctan der Zweig in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (Vergleich Verlauf des arctan!).

Zur Abkürzung schreibt man nach der Formel von Euler:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

3.3 Allgemeines zu Polarkoordinaten

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$ie^{i\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi$$
$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$e^z \cdot e^\omega = e^{z+\omega}$$
$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}$$
$$\log z = \log(re^{i\varphi}) = \log r + \log e^{i\varphi} = \log r + i\varphi$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

3.3.1 Multiplikation in Polarkoordinaten

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Merkregel dazu: Beträge werden multipliziert, Argumente (Winkel) addiert!

3.3.2 Division in Polarkoordinaten

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

3.3.3 Potenzieren in Polarkoordinaten

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

3.3.4 Wurzelziehen

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \qquad \text{mit} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Der Hauptwert ist bei $k = 0$.
besondere Wurzeln:

$$\sqrt[2]{z} = \sqrt[2]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}} \qquad \text{mit} \qquad k = 0 \text{ und } 1$$
$$\sqrt[i]{z} = z^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{1}{z}\ln z} = e^{\frac{1}{i}ri\arg z} = e^{r\arg z}$$
$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

3.4 Zur Parametrisierung in Polarkoordinaten

Der Einheitskreis wird parametrisiert mit:

$$\gamma(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{mit} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

bzw.:

$$|z - z_0| = 0$$

wobei z_0 der Mittelpunkt des Kreises ist (Vorzeichen beachten!).

3.5 Trigonometrische Funktionen mit komplexen Werten

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos(x + iy)) \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin iz = i \sinh z \qquad \sinh iz = i \sin z$$

$$\cos iz = \cosh z \qquad \cosh iz = \cos z$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2i}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

3.6 Berechnung von Logarithmen

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$\ln a = \ln|a| + i \arg a \text{ mit a } \in C$$

4 Funktionen einer komplexen Variablen

4.1 Holomorphe Funktionen

Eine Funktion ist holomorph (heißt auch analytisch oder regulär) (in einem Gebiet), wenn sie die

4.1.1 Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllt (in diesem Gebiet).

Überprüfen auf holomorphie:

1.
$$z = (u + iv)$$

2. ersetze
$$u = x \qquad v = y$$

3. einsetzen liefert
$$z = (x + iy)$$

4. trennen nach Re und Im (aus 3)
$$u(x, y) = \mathrm{Re} \qquad v = (x, y) = \mathrm{Im}$$

5. überprüfe Geltung der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

6. Wenn beide Gleichungen erfüllt sind, ist die Funktion holomorph!

Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion erfüllen die Laplacschen Differntialgleichungen

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

4.1.2 Ableiten mit Cauchy-Riemannschen-Diffgleichungen

Wie in Kapitel 4.1.1 wird z durch $x+iy$ ersetzt und nach Real- und Imaginärteil aufgelöst. Man hat dann also:

$$f(z) = \cdots = u(x,y) + iv(x,y)$$

Aus den Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen folgt:

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

Aus dem Beweis der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen folgt nun:

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

4.2 Die konforme Abbildung

Die konforme Abbildung erhält lokal Winkel- und Längenverhältnisse. Die Bedingung für Konformität in z_o lautet:

$$f'(z_0) \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad f \text{ konform in } z_0$$

4.2.1 Möbiustransformation

Eine Möbiustransformation ist eine konforme Abbildung. Sie bildet Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreisen ab.

- Allgemeine Form

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

- Jede Möbiustransformation setzt sich zusammen aus

$$z \mapsto z + a \text{ (Verschiebung um a)} \quad , \quad a \in \mathbf{C}$$

$$z \mapsto a \cdot z \text{ (Drehstreckung mit Winkel } \arg a \text{ und Faktor } |a|\text{)}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z} \text{ (Inversion)}$$

- Wichtig: Inverse einer Möbiustransformation ist eine Möbiustransformation !

- Eine Möbiustransformation heißt normiert, wenn gilt:

$$ad - bc = 1 \text{ bzw. e (was nichts mit Euler zu tun hat!)}$$

  Sobald eine Möbiustransformation normiert ist liegen die vier Zahlen a, b, c, d fest, bis auf einen Faktor ± 1.

- Bildung von Inversen:

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \rightarrow \quad f^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

  Achtung: Neue Bezeichnungen nach der Invertierung einführen!

4.2.2 Konstruktion einer Möbiustransformation

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1}$$

1. z_1, z_2, z_3 sind die Urbildpunkte (die Punkte von denen abgebildet wird auf 2)
2. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sind die abgebildeten Punkte
3. einsetzten (z_1 ... alles)
4. die Gleichung mit den Nennern multiplizieren
5. ω auf eine Seite bringen
6. $$\omega(= z) \ldots$$
7. !uberprüfen auf Fehler:
$$\text{es muss gelten: } ad - cb \neq 0$$

4.2.3 Möbiustransformation nach der Vorlesung

$$\omega = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

z_1, z_2, z_3 sind die Urbildpunkte; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sind die abgebildeten Punkte.

1. Drei Gleichungen sind aufzustellen (jeweils z_1, z_2, z_3 und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ einsetzen)
   a) $$\omega_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$$
   b) $$\omega_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$
   c) $$\omega_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}$$
2. irgendwie auflösen, alles in Abhängigkeit von a, b, c, d auflösen und
$$\omega(z) = \ldots$$
3. überprüfen, ob eine Möbiustransformation vorliegt:
$$ad - cb \neq 0$$

4.2.4 Fixpunkte

1. $$\omega = z$$

2. Bruch wegmultiplizieren

3. auflösen nach
$$0 = \ldots$$

4. Lösungen dafür suchen

4.3 Integrale allgemein

$$\int_a^b f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

Dabei ist γ eine Parametrisierung des Weges von a nach b. Dann gilt für die Lösung dieses Integrals: (Das stimmt noch nicht ganz so.) Die arametrisierung nennen wir $c(t), \text{ mit } t \in [c, d]$

$$\int_\gamma f(z) = \int_c^d f(c(t)) \cdot \dot{c}(t)\, dt$$

(Nicht vergessen, dass $c(t)$ einen Real- und Imaginärteil hat, was in der Berechnung von $f(c(t))$ beachtet werden muss!)

4.4 Cauchysche Integralformel

nach Schäfer und ein wenig Allmers :-)

Bedingungen erfüllen:

- Der Integrand (und zwar alles!) muss holomorph (siehe Kapitel 4.1) sein. (Wobei man hier argumentieren kann, dass die einzelnen Funktionen des Bruches (Zähler und Nenner) holomorph sind.)
- c muss eine geschlossene Kurve sein, die einmal im mathematisch positiven (gegen Uhrzeigersinn) Sinn durchlaufen wird.
- Die Polstelle (Singularität) `muss` innerhalb der Kurve c liegen. (Sonst siehe auch Kapitel 4.5!)

$$\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z)$$

1. n bestimmen (bzw. $n-1$ bestimmen)
2. Polstelle z bestimmen
3. $f(\xi) \quad (n-1)$ mal ableiten
4. z in das abgeleitete $f(\xi)$ einsetzen

`Achtung`: Wenn keine Polstellen vorhanden sind, kann eine Partialbruchzerlegung sinnvoll sein. (Siehe Kapitel 10.1)

4.5 Cauchyscher Integralsatz

Ist c eine geschlossene Kurve und f holomorph im Inneren von c (und zwar überall, also `keine` Polstellen), so ist:

$$\oint_c f(z) dz = 0$$

4.6 Residuensatz

Wenn eine Funktion $f(z)$ `innerhalb` einer geschlossenen Kurve n Polstellen hat, dann gilt:

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_{-1}(z_k)$$

mit a_{-1} Residuen der Funktion $f(z)$. (Siehe Kapitel 4.7)
Wenn Polstellen außerhalb von c: siehe Kapitel 4.5.

4.7 Berechnung von Residuen

1. Finde die Polstellen z_i (wie oft kommt die NST vor $\rightarrow$ m facher Pol) (wenn nötig mit PBZ, siehe Kapitel 10.1)

2. Die Residuen a_{-1} sind (z_i sind die NST):

$$a_{-1}(z_i) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_i)^m f(z))$$

   mit m: Ordnung des Pols.

Hinweise:

- Wenn die Polstelle in der Form

$$\frac{\cdots}{(z^2+1)}$$

  $\rightarrow$ sind die Nullstellen $i, -i$, das kann man auflösen auf

$$\frac{\cdots}{(z-i)(z+i)}$$

- `Achtung` auf hebbare Definitionslücken, evtl. kann man den Bruch kürzen! Außerdem sind die Residuen einer hebbaren Definitionslücke:

$$a_{-1} = 0$$

- Zur Kontrolle oder aus Zeitmangel:
  Das Residuum einer konjugiert komplexen Zahl ist das konjugiert komplexe Residuum. (Das ist ein total "komplexer" Satz, aber anders kann ich es gerade nicht ausdrücken. :-))

4.7.1 Berechnung von Residuen bei wesentlichen Singularitäten

Wenn die Funtion kein Bruch ist, sondern Singularitäten in der Form von

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$$

enthalten sind, nennt man diese wesentliche Singularitäten. Die Residuen dazu kann man nicht nach 4.7 berechnen, sondern man muss die Laurent Reihe entwickeln, das Residuum a_{-1} ist der Faktor, der $\frac{1}{z-z_0}$ enthält. Zur Berechnung der Laurentreihen greift man auf bestehende Potenzreihen aus dem Bronstein zurück und setzt ein.

Reihenentwicklung für e^z:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Für z kann man jetzt auch irgendein $f(z)$ einsetzen.

5 Partielle Differntiation

Allgemein:

$$\frac{\partial \vec{f}(x, y, z, \dots)}{\partial x(y, z, \dots)}$$

bedeutet $\vec{f}$ nach $x(y, z)$ ableiten, andere Variabeln sind "Konstanten"!
Beispiel:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \to \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 2x$$

Der `Gradient` ist der Zeilenvektor der partiellen Ableitungen:

$$\text{grad}\, f(\vec{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Beispiel für $g(x, y, z)$

$$\text{grad}\, g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

Der `Nabla Operator` ist der Gradient transponiert:

$$\nabla f(\vec{x}) := (\text{grad}\, f(\vec{x}))^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beispiel für $g(x, y, z)$:

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

`Höhere Ableitungen` gibt es, falls f stetig genug (!) ist (dabei ist die Reihenfolge egal...) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}$$

Der `Laplace Operator` ist die Summe der 2. Ableitungen:

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

`Vektorwertige Funktionen` werden zeilenweise abgeleitet (wenn dabei $m = n$ ist, dann das ein `Vektorfeld`):

$$\vec{f}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

`Divergenz` (Quelle und Senke):

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} := \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Beispiel: $\vec{f}(x, y, z) = (x - a, y, z) \qquad \to \qquad \operatorname{div}\vec{f} = 1 + 1 + 1 = 3$

Die `Rotation`:

$$\operatorname{rot}\vec{f} := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

Beispiel: $\vec{f}(x, y, z) = (a, x, b) \qquad \to \qquad \operatorname{rot}\vec{f} = (0 - 0, 0 - 0, 1 - 0) = (0, 0, 1)$

Die `Jacobi-Matrix`:

$$\mathrm{J}\,\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m \end{pmatrix}$$

Die `Hesse Matrix`:

$$\mathrm{H}\, f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

also im $\mathbf{R}^3$:

$$\mathrm{H}\, f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

6 Lösungsmethoden für Diffentialgleichungen

6.1 Trennung der Variabeln

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} = f(x) \cdot h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot h(y) \rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int f(x)dx$$

Das jetzt noch nach y auflösen.
`Beispiel`:

$$y' = y \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot x \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = x \cdot dx \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \ln y = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\rightarrow \qquad \ln y = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad \rightarrow \qquad y = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

6.2 Variation der Konstanten

$$y' = \frac{y}{?} \cdot ? = h \qquad (y' + a(t) + y(t) = h(t))$$

h ist die `Inhomogenität`, finde eine Lösung: Gleichungssystem 0 setzen, damit dann irgendein Lösungsverfahren durchführen.

Für die `Partikuläre Lösung` dann:

$$y_p = c_1(t)y_{1h}(t) + c_2(t)y_{2h}(t)$$

-wenn es nur ein y_h gibt: nur c_1

durch Einsetzen:

$$\rightarrow \qquad c'(t) \cdot y_h(t) = h(t) \qquad \rightarrow c'(t) = \frac{h(t)}{y_h(t)}$$

$$c(t) = \int \frac{h(t)}{y_h(t)} dt$$

6.3 Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}_{A} \cdot y$$

`Achtung`: Wenn Inhomogenität vorhanden, siehe Kapitel 6.4!

1. A definieren
2. Eigenwerte λ_i zu A bestimmen
3. Eigenvektoren (und eventuell Hauptvektoren) ($\vec{v}^i$) bestimmen
4. aus den Eigenvektoren und Eigenwerten:

$$\vec{y}_n = e^{\lambda_n t} \vec{v}^n$$

5. aus den Hauptvektoren:

$$y_n = \left(t \cdot \underbrace{\vec{v}^n}_{\text{Eigenvektor aus Kette}} + \underbrace{\vec{v}^{Hn}}_{\text{Hauptvektor}} \right) \cdot e^{\lambda_{Hn} t}$$

6. Lösung der DGL ist das Fundamentalsystem:

$$y_h = \sum_{n=1}^{n} C_n \cdot y_n$$

(Siehe auch AO2 S.178ff)

`Achtung`: Wenn komplexe Vektoren usw.:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

$$i e^{it} = i \cos t - \sin t$$

Die komplexen Ausdrücke werden "weggeworfen", die komplexe NST ist der Realteil, die konjugiert komplexe NST ist der Imaginärteil (`ohne i`)!

6.4 Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}_{A} \cdot y + \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{h}$$

Wenn h von t o.ä. abhängt: siehe Buch (AO 2, Satz 22.1.14, Seite 178), sonst:

1. Das h weglassen und nach Kapitel 6.3 lösen. Ergibt:

$$y' = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \cdot y_h \quad \rightarrow \quad y = \dots + C$$

2.

$$A\vec{\omega} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{h} \quad \rightarrow \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$y_p = \vec{\omega}$$

3. Zusammenfügen:

$$y(t) = y_p + y_h$$

`Achtung`: Wenn Komplexe Vektoren usw.:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

$$ie^{it} = i \cos t - \sin t$$

Die komplexen Ausdrücke werden "weggeworfen", die komplexe NST ist der Realteil, die konjugiert komplexe NST ist der Imaginärteil (`ohne i`)!

6.5 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

`Achtung`: Es gibt ein anderes Verfahren für $\neq 0$, siehe Kapitel 6.5.1!

$$y''' - ay'' + by' = 0$$

$$\text{Substituieren: } y' = \lambda \qquad y'' = \lambda^2 \qquad \text{usw. Achtung: } y = \lambda^0 = 1$$

Von diesem System die Nullstellen bestimmen (λ_k)

$$\rightarrow \qquad y_k(t) = e^{\lambda_k t} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k$$

Wenn mehrfache Nullstelle vorhanden sind:

- 1. NST: normal
- 2 fache: $te^{\lambda_k t}$
- 3 fache: $t^2 e^{\lambda_k r}$
- usw.

`Achtung`:
Wenn Nulstelle komplex $(a + ib)$, komplexe Darstellung:

$$e^{at} \left(C_1 \cos bt + C_2 i \sin bt \right)$$

Die realwertige Darstellung:

$$e^{at} \left(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt \right)$$

6.5.1 Anderes Verfahen für Lineare DGL mit konst. Koeff.

$$\underbrace{y'''}_{y^{(n)}} - \underbrace{3}_{a_2} y'' - \underbrace{2}_{a_1} y' + \underbrace{1}_{a_0} y = h(t)$$

`Achtung`: a_k könnten auch von t abhängen!

- Hauptdiagonale: 0 (außer unten rechts)
- Nebendiagonale (die über der Hauptdiagonale): 1
- letzte Zeile: $-a_0, -a_1, -a_2$ usw.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{-1}_{-a_0} & \underbrace{2}_{-a_1} & \underbrace{3}_{-a_2\text{usw.}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Das Ganze geht hier nur bis y_3, weil die 3. die höchste Ableitung ist, sonst halt mehr, dann Verfahren nach Kapitel 6.4.

6.6 Exakte DGLs

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \qquad p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

Intergrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{\partial q}{\partial x}, \text{ sonst Int. Faktor}$$

$$\text{grad } F = (F_x, F_y) \qquad F_x = p(x,y)$$

$$\int P(x,y)dx = \ldots + c(y) =: A + c(y)$$

$$\frac{d(A + c(y))}{dy} = \frac{dA}{dy} + c'(y) \stackrel{!}{=} q(x,y)$$

$$\rightarrow c'(y) := B \qquad \rightarrow \qquad c(y) = \int B dy$$

$$F(x,y) = A + \underbrace{\int B dy}_{:=c(y)} = c$$

nach $y = \ldots$ auflösen (AO2 S.153)

$$y = \ldots \text{ Lösung}$$

6.6.1 Integrierender Faktor für Exakte DGLs

- 1. Fall:

$$\frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)}{q} \text{ hängt nur von x ab}$$

$$\rightarrow \frac{dm}{dx} = -\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot m(x)$$

  die Lösung $m(x)$ dazu ist der Integrierende Faktor

- 2. Fall

$$\frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)}{p} \text{ hängt nur von y ab}$$

$$\rightarrow \frac{dm}{dy} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)}{p} \cdot m(y)$$

  die Lösung $m(y)$ dazu ist der Integrierende Faktor. Mit diesem wird die gegebene DGL mulipliziert und ist dann normal zu lösen.

6.7 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + p(x) \cdot y = r(x)$$

Allgemeine Lösung (keine weiteren Konstanten notwendig!)

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[C + \int r(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \right]$$

Hilfen dazu:

$$e^{\ln x} = x \qquad e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Es gibt ein anderes Lösungsverfahren mit:

$$y(x) = y_h + y_p$$

mit y_h:Trennung der Veränderlichen und y_p: Variation der Konstanten (AO3, S. 264)

6.8 Bernulli'sche DGL

$$y + p(x) \cdot y = r(x) \cdot y^n$$

Substituieren:

$$z(x) = y^{(1-n)} = \frac{1}{y^{b-1}}$$

führt auf Lineare DGL 1. Ordnung (siehe Kapitel (6.7)

$$\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = r(x) \text{ bzw. } z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n) \cdot r(x)$$

Allgemeine Lösung:

$$z(x) = e^{-\int (1-n)p(x)dx} \left[C + \int \left((1-n) \cdot r(x) \cdot e^{\int (1-n)p(x)dx} \right) dx \right]$$

Rücksubstitution:

$$z(x) = \frac{1}{y^{(n-1)}} \quad \rightarrow \quad y^{(n-1)} = \frac{1}{z(x)} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt[n-1]{\frac{1}{z(x)}}$$

`Achtung:`

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{z(x)} \qquad n = 5 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt[4]{\frac{1}{z(x)}}$$

6.9 Riccard'sche DGL

$$y' + a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^2 = c(x)$$

1. Lösung erraten $\rightarrow y = u(x)$
2. Allgemeine Lösung $y = u(x) + v(x)$ Durch das Erraten wird aus der Ricard'schen DGL eine Bernulli'sche DGL siehe Kapitel (6.8):

$$v' + \underbrace{(a(x) + Zu(x) \cdot b(x))}_{p(x)} \cdot V = \underbrace{-b(x)}_{r(x)} \cdot v^2 \quad n = 2$$

$$Z(x) = e^{\int p(x)dx} \left[C + \int (-1 \cdot r(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}) dx \right]$$

$$v(x) = \frac{1}{Z(x)} \text{ wegen } n = 2$$

Gesamtlösung:

$$y = u(x) + v(x)$$

6.10 Stabilität

1. Stationäre Punkte berechnen:

$$y' = \cdots (1) \qquad \text{und} \qquad x' = \cdots (2)$$

   ich sage:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cdots (1) \\ \cdots (2) \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad f(x,y) \stackrel{!}{=} 0$$

   Die Punkte, die dieses Gleichungsystem lösen (müssen evtl. geraten werden!), sind stationäre Punkte.

2. Klassifizierung

   - bilde $\mathrm{J}\, f(x,y)$
   - setze Punkte aus Punkt 1 ein in $\mathrm{J}\, f(x,y)$
   - bilde Eigenwerte und Eigenvektoren zu $\mathrm{J}\, f(x,y)$ (gesucht: λ_i und $g(\lambda_i)$ (geometrische Vielfachheit, siehe Kapitel 2))
   - Ergebnisse abgleichen mit AO2 S.200ff

6.11 Randwertaufgaben

6.12 Allgemeines

Es gibt noch `Stur'msche, lineare und allgemeine Zweipunkt Randwertaufgaben`, diese haben wir nicht in der VL besprochen, stehen aber im AO2 ab Seite 208!

6.12.1 Lineare Randwertaufgaben zweiter Ordnung

(AO2, S. 219) Gegeben ist eine DGL in der Form:

$$y''(t) + y'(t) \ldots = h(t)$$

und Randwerte:

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) - y'(1) = 0$$

1. Fundamentalsystem bestimmen ($= 0$), daraus kommt dann etwas wie

$$y_1 = \ldots \qquad y_2 = \ldots$$

2. Ansatz für die Green'sche Funktion:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \left(a_i(\tau) + b_i(\tau)\right) y_i(t) & : \quad \tau \leq t \\ \sum_{i=1}^{2} \left(a_i(\tau) - b_i(\tau)\right) y_i(t) & : \quad \tau \geq t \end{cases}$$

3. a_i, b_i bestimmen:

$$\sum_{i=1}^{2} b_i(t) y_i(t) = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{2} b_i(t) y_i'(t) = \frac{1}{2}$$

jetzt die Randbedingungen in $G(t,\tau)$ einsetzten und die a_i bestimmen.

Damit hat man eine bestimmte Green'sche Funktion und die Lösung der RWA ist:

4.

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau) h(\tau) d\tau$$

Die Grenzen sind die Ränder der Sprungbedingung (das mit $y'(\ldots) - y'(\ldots) = 0$ hier also 0 und 1').

`Achtung`, dadurch dass die Green'sche Funktion zwei geteilt ist, muss ich über beide Bereiche Integrieren, also die beiden Teilfunktionen integrieren und addieren, die Grenzen sind dann (a,t) und (t,b)!

7 Implizite Differentiation

Es ist etwas gegeben in der Form:

$$f(x, y) = \ldots = 0$$

außerdem ist ein Punkt $P_1 = (x, y)$ gegeben.

- P_1 in $f(x, y)$ einsetzen, muss 0 ergeben
- grad $f(x, y)$ (bzw. J $f(x)$ wenn in $\mathbf{R}^3$) bestimmen, Punkt P_1 einsetzen, Ergebnis muss $\neq \vec{0}$ sein, dann darf ich nach x/y auflösen. Wenn einer davon $= 0$, dann nur nach der anderen auflösbar.
- $$x = h(y) \text{ lokale Auflösbarkeit nach x}$$
  $$y = h(x) \text{ lokale Auflösbarkeit nach y}$$
- jeweils einsetzen (und zwar auf "beiden Seiten der Gleichung")
  $$f(x, h(x)) = \ldots \quad \text{oder} \quad f(h(y), y) = \ldots$$
- Die Ableitungen des neuen $f(x, h(x)$ oder $f(h(y), y)$ bilden, somit erhält man einen impliziten Ausdruck für $h'(x/y)$.

  Hilfe dazu:
  $$h^2(x) = 2h(x)h'(x) \qquad \rightarrow \qquad h(x) \rightarrow h'(x)\frac{d}{dx}$$
- Da der Punkt p_1 gegeben ist, weiß ich:
  $$P_1 = (a, b) \quad \rightarrow \quad h(a) \stackrel{!}{=} b$$
- Nach $h'(x/y) = \ldots$ auflösen!

  (Wenn Auflösbarkeit gegeben ist, kann man auch explizit auflösen!)

`Achtung`: Wenn kein Punkt gegeben ist, die Gleichung allgemein auf lokale Auflösbarkeit kontrollieren. Danach einsetzten, was verlangt ist, allgemein nach der gesuchten Ableitung auflösen und ableiten.

8 Extrema von Funktionen meherer Variabler

1. Stationäre Punkte
   - grad $f(\vec{x})$ bestimmen
   - Notwendige Bedingung: grad $f(\vec{x}) \overset{!}{=} 0$
   - gefundene Punkte in die Funktion einsetzen
2. Klassifizierung der gefunden Punkte
   - Hesse Matrix H $f(\vec{x})$ berechnen
   - Eigenwerte berechnen (jeweils zu den eingesetzen Punkten)
     - alle EW $> 0 \rightarrow$ strenges lokales Minimum
     - alle EW $< 0 \rightarrow$ strenges lokales Maximum
     - $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt
     - alle EW oder ein EW Null: ausgeartet

8.1 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Es sind zum Beispiel die Extremwerte einer Funktion f innerhalb eines Kreises oder soetwas gefragt, dann gibt es eine Nebenbedingung in der Form $x + y \leq n$ für das Innere dieser Figur ($< n$ siehe oben, ganz normal die Extrema ausrechnen und dann überprüfen, ob sie in der Nebenbedingung liegen). (Liegen die Punkte in dem Kreis?)

Für den Rand muss man zuerst eine Funktion der Nebenbedingungen aufstellen:

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \text{NB} \\ \text{NB} \\ \text{usw.} \end{pmatrix}$$

Jetzt wird für $g(\vec{x})$ die `Regularitätsbedingung` überprüft:

$$\text{Rang}\,\mathrm{J}(g(\vec{x})) = m \text{ mit } m = \text{Anzahl der Nebenbedingungen}$$

Jetzt wird mit der `Lagrangemultiplikatorenregel` eine neue Funktion F erstellt:

$$\underbrace{F}_{\text{neue Funktion}} = \underbrace{f}_{\text{geg. Funktion}} + \sum_{i=1}^{\overbrace{m}^{\text{Anzahl NB}}} \lambda_i g_i$$

Jetzt wie gehabt die Notwendige Bedingung der Form:

$$\text{grad}\, F(x, y, z, \lambda_1 \dots) \stackrel{!}{=} 0$$

Dabei kann es sehr sinvoll sein, die Werte der λ_i zu raten. Das Gleichungssystem ist sonst schwer zu lösen. Die Klassifizierung erfolgt entweder über die Werte der Punkte in $f(\vec{x})$, oder über ein System (Stichwort: aufsteigend oder absteigend) aus AO2.

9 Fourier Reihe

(unbedingt wegen gerader / ungerader usw. Fortsetzung: AO1 Kapitel 16!)

1. Zeichnung
2. T bestimmen (Periode) $\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$
3. Ist die Funktion gerade oder ungerade?
   - gerade: $f(x) = -f(x) \rightarrow b_k = 0$
   - ungerade: $f(x) = -f(-x) \rightarrow a_k = 0$
   - keins von beidem: alles berechnen
4. a_0 bestimmen:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\underbrace{\cos(0\omega x)}_{=1}dx = \int_0^T y(x)dx$$

5. a_k und b_k bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\cos(k\omega x)dx$$

und

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(x)\sin(k\omega x)dx$$

`Achtung`: Es kann sein, dass a_k oder b_k Null sind (s.o.). Anstelle 0 und T können auch die Grenzen, in denen ich fortsetze, benutzt werden.

6. Zusammensetzen:

$$F_y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)$$

9.1 Komplexe Fourier Reihe

Einige Formeln dazu, das Prinzip ist das gleiche wie in Kapitel 9.

$$F(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{i\omega k t}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, k \in Z$$

$$a_0 = 2\gamma_0 \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$$

bzw.

$$\gamma_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

10 Integration

10.1 Partialbruchzerlegung

1. Gegeben:
$$\frac{p}{q} \quad \text{Potenz von } p < q$$

2. Wenn Potenz $p \geq q$ dann Polynomdivision (siehe Kapitel 2)

3. Von q die Nullstellen (Annahme der Nullstellen für das Beispiel!) suchen ($q \stackrel{!}{=} 0$), dann:
$$\frac{p}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)} \tag{1}$$
oder es kann so etwas passieren:
$$\frac{p}{(x-1)x^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3}$$
$$\frac{p}{x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1}$$
oder:
$$\frac{p}{x^2+1} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}$$
(Wenn Potenzen im Nenner, treten diese auch in der Anzahl der Potenz auf!)

4. Ganze Gleichung mit dem `Zähler der linken Seite`!!! multiplizieren wir verwenden (1):
$$p = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$
Jetzt wählt man Werte für x (auch i als Zahl einsetzten, wenn benötigt) und setzt diese ein (auch in p), so dass nur eine Unbekannte (A, B, C) vorhanden ist. So findet man Lösungen für A, B, C. Wenn man nicht mehr weiterkommt, kann man das gesamte System einmal ableiten, das so gewonnen Ergebnis muss man wieder in die unabgeleitete Gleichung einsetzten. Diese setzt man nun wieder in das ursprüngliche Gleichungssystem (1) ein.

5. Gewonnene Ergebnisse in (1) einsetzen und auf beiden Seiten integriegen:
$$\int \frac{p}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \frac{A}{(x+1)} + \int \frac{B}{(x+2)} + \int \frac{C}{(x+3)}$$
Wenn ohne Grenzen Integriert wird, Konstante C nicht vergessen!

`Merke für Markus`:
$$x - \text{ Nullstelle}$$

`Achtung`: Komplexe Nullstellen treten immer mit ihrer "kleinen Schwester" (konjugiert komplexer NST) auf! Diese werden aber als eine NST aufgefasst!

`Achtung`: C nicht vergessen!!

10.2 Partielle Integration

$$\int u'v dx = u \cdot v - \int uv' dx$$

Merke dazu:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln |f(x)|$$

Beispiel:

$$\int \underbrace{9x^2}_{u'} \underbrace{\ln |x}_{v} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} u' = 9x^2 & v = \ln |x| \\ u = 3x^3 & v' = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$= 3x^3 \ln |x| - \int 3x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = 3x^3 \ln |x| - \int 3x^2 dx$$

$$= 3x^3 \ln |x| - x^3 + \underbrace{C}_{\text{nicht vergessen!}} = 2x^3 \ln |x| + C$$

10.3 Integralsätze von Gauß Stokes

kann ich nicht müssen wir nochmal aufschreiben...

10.4 Bereichsintegrale

wenn das nicht das gleiche ist wie irgendwas was wir schon haben...

11 Parametrisierungen, Flächenintegrale usw.

11.1 Berechnung von Flächen (Parametrisierung)

Gegeben ist irgend etwas in der Form:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \middle| \quad x^2 + y^2 < 1 \wedge Z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

1. Vorstellen, was es ist (zeichnen, es kann hilfreich sein, x, y oder z "festzuhalten" und einen Schnitt zu zeichnen).

2. Anhand dieser Vorstellung eine intelligente(!) Parameterisierung finden, hier:

   - kartesisch

   $$P_1 : K_1 \to \mathbf{R}^3 \qquad P_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

   $$K_1 : \left\{ (x, y)^T \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad -1 \le x \le 1 \wedge -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

   - polar

   $$P_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} \text{ (entsteht aus der kartesischen eingesetzt)}$$

   $$[0 \le r \le 1], [0 \le \varphi \le 2\pi]$$

3. Fläche ist:

   $$\int_E d\vec{o} = \int_K \left\| \frac{\partial P_1}{\partial x(r)} \times \frac{\partial P_1}{\partial y(\varphi)} \right\|_2 dxdy \text{ bzw. } drd\varphi$$

   Es gilt:

   $$\int_a^b \int_c^d dxdy = \int_c^d \int_a^b dydx$$

11.2 Fluss durch Flächen

Flächen parametrisieren $\to$ $K, P(r,\varphi)$, das Vektorfeld, das strömt, sei: $f(x,y,z) = (\ldots,\ldots)^T$ Der Fluss ist:

$$\int_M f(\vec{x})d\vec{o} = \int_K \left\langle f(\overbrace{P(r,\varphi)}^{\text{Parametrisierung}}), \underbrace{\frac{\partial P}{\partial r} \times \frac{\partial P}{\partial \varphi}}_{\text{Äußere Normalenrichtung}} \right\rangle dr d\varphi$$

K ist die Menge der Parametrisierung

11.3 Verschiedene Koordinatensysteme

(S. 207, Bronstein)

- Polar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

- Kugel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

- Zylinder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

12 Linearer Ausgleich

12.1 Nicht komplexer linearer Ausgleich

Man bekommt eine Reihe von Daten und soll dazu eine Ausgleichsfunktion finden. Das Ganze könnte in etwa so aussehen:

t_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	3	3	4	3

bzw. um es allgemein zu halten:

t_i	a	b	c	d	e
y_i	f	g	h	i	j

Dazu soll man dann eine Ausgleichsgrade, Parabel oder so etwas herstellen, die die Form:

$$g(t) = a_1 + a_2 t \qquad \text{oder} \qquad p(t) = b_1 + b_2 t^2$$

hat. Dazu muß man das dazugehörige Gleichungsystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösen, dazu stellt man auf:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \\ 1 & c \\ 1 & d \\ \underbrace{1}_{x^0,\text{ immer 1}} & e \end{pmatrix}$$

für die Ausgleichsgerade
und für die Ausgleichsparabel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & & a^2 \\ 1 & & b^2 \\ 1 & & c^2 \\ 1 & & d^2 \\ \underbrace{1}_{x^0,\text{ immer 0}} & \text{dazwischen käme noch } x^1 & e^2 \end{pmatrix}$$

A hat als Spalten die t_i hoch 0(=1), hoch 1, hoch 2 usw., die in der gesuchten Funktion nicht vorhandenen Potenzen auch in A weglassen.

Für beide noch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

sowie:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{b} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{pmatrix}$$

dann gibt es die `Normalengleichung`:

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$

woraus man ein Gleichungsystem für $\vec{x}$ erhält, so dass man die Unbekannten der Ausgleichsfunktion berechnen kann.

Ein Merkmal für die Güte der Annäherung der Ausgleichsfunktion ist das Residuum. Es wird wie folgt berechnet:

$$\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$$

Die Güte des Residuums ist definiert durch:

$$\|\vec{r}\|_2 = \left\|A\vec{x} - \vec{b}\right\|_2$$

13 Drehmatrix

$$\det A \overset{!}{=} 1$$

Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis in etwa $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

- Drehachse $\vec{v}$ ist die Lösung zu:

  $$(A - I)\vec{v} \overset{!}{=} \vec{0}$$

- Drehwinkel: wähle

  $$\vec{w} \perp \vec{v}$$

  jetzt wird $\vec{w}$ gedreht:

  $$A\vec{w} = ? \quad \rightarrow \quad < \vec{w}, A\vec{w} >= \|\vec{w}\| \|A\vec{w}\| \cos\varphi$$

  nach φ auflösen und fertig!

14 Hauptachsentransformation (Quadriken)

Es ist irged etwas gegeben in der Form:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_3 + ex_1x_2 + fx_1 + gx_2 + hx_3 + j = 0$$

Daraus bildet man die Matrix A, den Vektor $\vec{b}$ und die Konstante c:

- Die Matrix A hat auf der Hauptdiagonalen die quadratischen Faktoren und ansonsten ein "Schiffeversenkenmuster", wobei Terme, in denen zwei Variablen vorkommen getrennt werden.
  (Hauptdiagonale: die Faktoren der Quadratischen Terme, sonst die Hälfte der Faktoren der Terme wo beide vorkommen.)

$$A = \begin{pmatrix} \searrow x_i^2 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_1 & & & \frac{x_1x_3}{2} \\ \mathbf{x}_2 & & & \\ \mathbf{x}_3 & & \frac{x_3x_2}{2} & \end{pmatrix}$$

- Der Vektor $\vec{b}$ enthält die einfachen Terme, in etwa so:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

- c ist die Konstante ohne Variable:

$$c = j$$

- Wenn man einen Faktor aus jeder Zeile der Matrix ausklammert muß er davor in der 3 (bei 3x3) Potenz stehen.
- Bilde die Eigenwerte von A ($\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$
- Wenn ich einen Wert aus der Matrix ausklammere wird dieser vor die Determinante geschrieben und muss als Faktor vor den λ stehen!
- Bilde die Eigenvektoren zu den $\lambda_i(\vec{v}_i)$
- Normiere die Eigenvektoren $\vec{s}_i = \frac{\vec{v}_i}{||\vec{v}_i||_2}$
- Bilde die Matrix S, die spaltenweise aus den normierten Eigenvektoren besteht.
- S muss eine Drehmatix sein ($\det S = 1$)
- Sonst Spalten tauschen!

Die Quadrik sei dargestellt durch:

$$\vec{x}^T A\vec{x} + \vec{b}^T\vec{x} + c = 0$$

Es wird auf Normalenform transformiert mit:

$$\vec{x} = S\vec{y} = S(z - p)$$

Damit hat die Quadrik nun die Form:

$$\vec{y}^T S^T AS\vec{y} + \underbrace{\vec{b}^T S\vec{y}}_{S^T\vec{b}=:\tilde{\vec{b}}} + c = 0$$

Achtung: Durch das Vertauschen der Spalten von s haben sich unter Umständen auch die λ getauscht, unbedingt aktuelle Reihenfolge verwenden!

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \tilde{b_1}\, x_1 + \tilde{b_2}\, x_2 + \tilde{b_3}\, x_3 + c = 0$$

$$z_1 = x_1 + \frac{\tilde{b_1}}{2\lambda_1} \qquad z_2 = x_2 + \frac{\tilde{b_2}}{2\lambda_2} \qquad z_3 = x_3 + \frac{\tilde{b_3}}{2\lambda_3}$$

nach x umformen:

$$x_1 = z_1 + \frac{\tilde{b_1}}{2\lambda_1}$$

15 Basistransformation

$$\begin{array}{ccc} \vec{e}_1\vec{e}_2 & \overset{A}{\to} & \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 \\ S\uparrow & & \uparrow R \\ \vec{v}_1\vec{v}_2 & \overset{B}{\to} & \vec{w}_1\vec{w}_2\vec{w}_3 \end{array}$$

$$B = R^{-1}AS$$

1. S besteht aus den $\vec{v}$
2. R besteht aus den $\vec{w}$
3. R invertieren (siehe Kapitel 2)

16 Kurvendiskusion

Ziel: Feststellen des qualitativen und quantitativen Verlaufs des Graphen einer Funktion.

1. `Definitionsbereich` **D**, der maximale. Insbesondere muß man auf sg. isolierte Singularitäten (einzelne Punkte ohne **D**) zu achten und ob diese stetig ergänzbar sind. Bei einem Bruch nur Nenner Null setzten. Darstellung:

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{\ldots\}$$

2. `Symmetrie`:

$$f(x) = -f(x) \qquad f(x) \text{ symmetrisch zur y-Achse, gerade Funktion}$$

$$f(x) = -f(-x) \qquad f(x) \text{ symmetrisch zum Ursprung, ungerade Funktion}$$

3. `Pole` hat $f(x)$ die Form $f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_0)^k}$ mit $g(x)$ stetig an x_0, $g(x) \neq 0$ so besitzt $f(x)$ in x_0

   - einen Pol mit Vorzeichenwechsel für k ungerade
   - einen Pol ohne Vorzeichenwechsel für k gerade

   Pole sind stellen wo der Graph der Funktion gegeb $\pm\infty$ geht, z.B. Stellen ohne **D**

4. `Verhalten der Funktion im` ∞`, Asymptoten`

   - bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

   - Asymptoten: eine Grade $y = \alpha x + \beta$ heißt Asymptote von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ fallst der

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0$$

     ist. Dann lassen sich die Koeffizienten α und β gemäß

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

     bestimmen.

5. `Nullstellen`

$$f(x) \stackrel{!}{=} 0$$

6. Funktion `ableiten` (bis zur 3. Ableitung)

7. Bestimmung von `Extremwerten`

- Randpunkte des **D** sind gesondert zu untersuchen, z.B. mit Hilfe von Monotoniebetrachtungen
- innere Punkte werden mittels
  - notwendige Bedingung
  $$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$$
  - hinreichende Bedingung
  $$f''(x) \neq 0$$

  und zwar:
  $$f''(x) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Minimum}$$
  $$f''(x) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{Maximum}$$

  jeweils mit den mit $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ gefunden Punkten, die ich für die y Werte in $f(x)$ einsetze

  untersucht

8. Für `Wendepunkte` verwendet man:
   - notwendige Bedingung
   $$f''(x) \stackrel{!}{=} 0$$
   - hinreichende Bedingung
   $$f'''(x) \neq 0$$

   oder untersucht Konvexitätsbereiche

9. `Skizze` des Graphen mit den gewonnen Daten

17 Folgen und Reihen

17.1 Reihen

- Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent falls } \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ digvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

- Leibnitz-Kriterium

$$\sum (-1)^k a_k$$

ist konvergent falls $a_k \to 0$

- Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \approx \sum a_k(x - x_0^k) \text{ konvergent: } |x - x_0| < R$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

$$\sum a_k x^k :$$

$|x| < R \to$ konvergent $\quad |x| > R \to$ divergent $\quad |x| = R \to$ keine Aussage

Hilfen:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1 \qquad \frac{1}{k} \text{ ist Nullfolge}$$

17.2 Folgen

siehe Bronstein oder AO1!